小学生でも分かる量子計算

平成 29 年 6 月 30 日

1

科学の大好きな小学 3 年生の花子ちゃんは、隣に住んでいる量子計算機科学者の Q 博士のところに遊びに行きました。

花子：博士、こんにちは。最近お友達とのスラックで「りょうしけいさんき」とか、「りょうしすぷれましー」っていうじゃーごんが良くでてくるんだけど、それって何なの？

博士：花子ちゃん、いらっしゃい。量子計算機というのはね、とっても速い計算機のことなんだよ。花子ちゃんちにもパソコンがあるでしょ。それよりも超速いんだよ。

花子：ふーん。でも私のパパは F 通でスパコン作っているっていってたけど、それよりは遅いんじゃないの？

博士：今あるコンピューターは全て、古典力学というものに基づいているけど、量子計算機というのは、量子力学という新しい理論に基づいているから、もっともっと速いんだよ。

花子：ふーん、そうなんだ。すごいねー。じゃあどんなに難しい問題でも解けちゃうんだ。例えば PSPACE 完全問題である TQBF 問題とか。

博士：量子計算機は凄いといっても何でも解けるわけではなくて、解けないものもあるんだよ。というか、正確にいうと、解けないだろうと思われているものもあるんだよ。では、今日は、量子計算機の能力を理解するために、ときめき〇モリアルを例に使って説明してみよう。

ときめき〇モリアルでは、主人公はいろいろな場面で、二者択一の選択に迫られるんだよ。例えば、学校に行くか、公園に行くか。あるいは、野球部に入るかサッカー部に入るか。このゲームのメインキャラクターである F 崎 S 織さんは、非常に好みのうるさい女性であり、好意を抱いてもらうためには正しい選択肢を選ばないといけないんだよ。もし正しい選択肢を選んだら、めでたく F 崎さんが木の下に出没し、ゲームはクリアーとなるんだよ。

F 崎さんに好意を抱かれるような選択肢の数を A、F 崎さんに嫌われてしまうような選択肢の数を R としよう。（それぞれ、Accept、Reject を表す。）例えば、図 1 のような例だと、$A=3, R=2$ だね。この図の場合、選択肢が

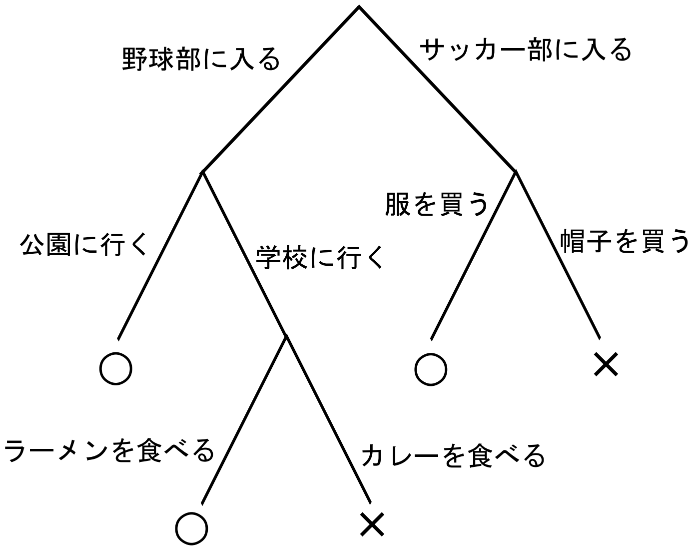

図 1: ○は F 崎さんに好かれる選択肢、×は嫌われる選択肢。

数個しかないから手でも計算できるけど、もっと巨大な木になると、選択肢の数が膨大すぎて、とても手では計算できないんだ。

花子：おねいさんがロボットになって子孫に連絡をとるくらい大変ってことだね。

博士 :???

博士：A の値を求める問題は #P 完全問題って呼ばれており、非常に難しい問題なんだ。

花子：じゃあ、量子計算機ならその難しい問題が解けるの？

博士：実は、#P 完全問題は、量子計算機でも解けないだろうと思われているんだ。例えば、ちょっと難しい話になるけど、ある日本人の研究者が証明した定理を使うと、もし量子計算機が #P 完全問題を解けたら、BQP が多項式階層を含むってことが言えるんだけど、それは信じられていないんだ。

花子：うーん、難しいなあ。とだのていりなんて知らないよ。

博士：知ってるやん。

2

花子：A の値を求めるのは大変だけど、A が 0 じゃないか 0 かを判定するだけなら、もっと簡単なんじゃないの？それだったら、量子計算機でもできるのかも。

博士：そうだね、そのような問題は NP 完全問題と呼ばれているんだけど、それも今のところ、量子計算機ではどうやって解いていいか分からないんだ。

解けないだろう、ということを示唆する証拠もあるから [1]、研究者たちは今のところ、たぶん量子計算機は NP 完全問題を解けないだろうと予想しているんだよ。

花子 : ふーん。よく分からないけど、つまり、BQP が NP を含まないオラクルが知られているってこと？

博士 : よく分かってるやん。

花子 : 量子計算機は NP 完全問題を解けないんじゃあ、あまりたいしたことないように見えるね。最近はやりの○○とかのほうが量子計算機よりも強力なんじゃないの？

博士 : 物理現象は量子論に従っているから、どんなマシーンを物理的に作っても、それは量子計算機を超えることはできないよね。

花子 : あたりまえだよね。あははー。

3

次の日。。。花子ちゃんが慌てて博士のもとにやってきました。

花子 : 博士！発見しました！昨日、うちに帰ってから Dirac の量子論の教科書（原著）買って読んで、量子論初めて勉強したんだけど、量子計算機使えば NP 完全問題解けることに気づきました！

博士 : うそーん。

花子 : 量子論って重ね合わせできるじゃないですか。なので、主人公の行動パターンを全て重ね合わせた状態

$$\sum_{z\in\{0,1\}^n}|z\rangle$$

をまず作ります。ここで、z は主人公の行動パターンを表します。また、n は卒業までの日数です。で、量子計算機を走らせてこれを

$$\sum_z|z\rangle\otimes|f(z)\rangle$$

という状態にします。ここで、$f(z)$ は、主人公の行動パターン z が F 崎さんに好かれるものだったら 0、好かれないものだったら 1 を取る関数とします。で、最後に $f(z)$ の値を測定して、もし 0 が出たら、$A\neq 0$、もし 0 がでなかったら $A=0$ と分かるので、NP 完全問題解けますよ !! 重ね合わせを使うことにより、全てのパターンを一度に処理してるんです !! 古典だと 2^n 回の処理がいるところが、量子だと 1 回の処理ですむんです。9000 兆倍ですよ！

博士 : 花子ちゃん、残念ながら、それはうまくいかないよ。なぜならば、

$$\sum_z|z\rangle\otimes|f(z)\rangle$$

[1] Bennett, Bernstein, Brassard, and Vazirani, Strengths and weaknesses of quantum computing, SIAM Journal on Computing, 26 1510 (1997)

は規格化してちゃんと書くと

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_z |z\rangle \otimes |f(z)\rangle$$

になるよね？そうすると、$f(z)$ の値を測定したときに 0 の出る確率は $\frac{A}{2^n}$ でしょ？[2] だから、$A=0$ か $A \geq 1$ かを判定するためには、この確率を指数の逆数精度で推定しないといけないけど、そのためにはこの量子計算を $O(2^n)$ 回繰り返さないといけないよ。

花子：本当だ。。。

博士：しかも、そのロジックだったら別に量子でなくて、

$$\frac{1}{2^n} \sum_{z \in \{0,1\}^n} |z\rangle\langle z|$$

という古典混合状態でやってもおなじでしょ？[3] したがって、もしそれでうまくいくんだったら、古典計算機でもうまくいくことになるよ。

花子：がっかり。。。

博士：まあ、実際、量子計算機が速い理由をそんな感じで説明している間違った記事とかいっぱいあるんだけどね。

4

花子：じゃあ、結局、量子計算機は何がとけるの？

博士：量子計算機を使うと、例えば、

$$\frac{(A-R)^2}{2^{2s+1}}$$

を多項式の逆数精度で近似できるんだ。ここで、s はゲーム終了までにかかった最長の日数だよ [4] 。

花子：ふーん。$(A-R)^2/2^{2s+1}$ の厳密な値が求まるわけでなくて、多項式の逆数精度の近似しかできないんだ。

博士：うん。もっと正確にいうと、量子計算機ができるのは、$(A-R)^2/2^{2s+1}$ の値そのものを出力するわけでなくて、表を確率 $(A-R)^2/2^{2s+1}$ で、裏を確率 $1-(A-R)^2/2^{2s+1}$ で出すようなコインをつかったコインフリップをシミレートできるんだ。確率 p で表がでるコインを多項式回振ったら p の値を多項式の逆数の精度で求めることができるでしょ？

[2] 状態 $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_z |z\rangle|f(z)\rangle$ の $f(z)$ の値を測定して、0 がでたとき、状態は $\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z:f(z)=0} |z\rangle|0\rangle$ に射影される。このノルムは $\frac{1}{2^n} \sum_{z:f(z)=0} = \frac{A}{2^n}$ である。

[3] $\frac{1}{2^n} \sum_{z \in \{0,1\}^n} |z\rangle\langle z| \otimes |f(z)\rangle\langle f(z)|$ の $f(z)$ の値を測定したとき、0 が出る確率は $\mathrm{Tr}(\frac{1}{2^n} \sum_{z:f(z)=0} |z\rangle\langle z| \otimes |0\rangle\langle 0|) = \frac{A}{2^n}$。

[4] Fenner, Green, Homer, and Pruim, Determining acceptance possibility for a quantum computation is hard for the polynomial hierarchy, arXiv:quant-ph/9812056

花子：ああ、そうだったね。確率統計の授業でならった。

博士：ちなみに、花子ちゃんちにあるパソコンとか、花子ちゃんのパパが作っているようなスパコンとかを使うと、例えば、表が

$$\frac{A}{2^{s+1}}$$

の確率ででるコインフリップをシミレートできるんだ。（よって、$A/2^{s+1}$ の値を多項式の逆数精度で計算できる。）だけど、量子計算機みたいに、$A-R$ を含む確率のコインフリップはできないんだ。（正確にいうと、できないという数学的証明があるわけでなく、今のところどうやってやればいいか分からない。）ここが、量子計算機のほうが古典計算機よりも優れている点なんだ。

花子：なんで量子だと $A-R$ を含む確率が作れるの？

博士：それは、量子だと「確率」が負になりえるからなんだ。

花子：はかせがくるった！

博士：例えば、

- F 崎さんと K 桐さんに好かれる確率が 1/4
- F 崎さんと A さひなさんに好かれる確率が 1/4
- F 崎さんに嫌われる確率が 1/2

だとしよう。すると、F 崎さんに好かれる確率は

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

だよね。

花子：うむ。

博士：量子だと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|\text{F 崎さんと K 桐さんに好かれる}\rangle \\ - & \frac{1}{2}|\text{F 崎さんと A さひなさんに好かれる}\rangle \\ + & \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{F 崎さんに嫌われる}\rangle \end{aligned}$$

という状態を作れるんだ。そして、これを、

$$\langle\text{F 崎さんに好かれる}|\otimes\frac{\langle\text{K 桐さんに好かれる}|+\langle\text{A さひなさんに好かれる}|}{\sqrt{2}}$$

に射影すると、その成功確率は、

$$\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)^2=0$$

となる。

花子：あれ？F 崎さんに好かれる確率が 0 になっちゃった。F 崎さんに好かれる事象は二つあったはずなのに。不思議だなあ。

博士：古典の場合、確率は非負なので、いったんできた確率は取り消せないけど、量子の場合、「確率」は負にもなりえるので、二つの「確率」を互いにキャンセルさせて、「事象」が「無かったこと」にできるんだ。

博士：この、負になる「確率」をうまくつかって、異なる計算パスを互いにキャンセルさせることにより、確率分布に偏りをつくることにより、正しい結果の出る確率を「増幅」させることができるから、量子計算は古典計算より優れているんだ。花子ちゃんのこないだの NP 完全問題を解くアイデアも、このキャンセルをうまく利用して、2^{-n} の確率を $1/poly$ 程度に増幅できたら、うまくいくんだけどね。でもどうやってそのように増幅したらいいか、まだ誰も分かっていないんだ。むしろ、どうも増幅できなさそうだ、という結果のほうが多い。

花子：でも「確率」が負って、気持ち悪いね。量子論がまちがっているんじゃないの？

博士：たしかに、日常生活の直観とは反するけど、でも、物理学者が長年検討した結果、そうでないと実験結果とつじつまが合わないから、それを受け入れざるを得ないんだ。例えば、今では誰でも地球は球だって知っているけど、大昔の人にそうやっていったら、「頭おかしいんじゃないの？下の人は落ちちゃうじゃん」っていわれるでしょ？たしかに、普通に生活しているだけでは地球は平らだって思うのが自然だよね。でも、いろいろ科学的研究を進めた結果、地球は球でないとつじつまがあわないことが分かり、いまでは、地球が球であることが受け入れられているんだ。それと同じだよ。我々の直観と言うのは、普段生活しているマクロな世界の出来事からきているけど、ミクロな世界の振る舞いは、不幸にも、それとはだいぶ違っている様子なので、我々の直観にあわなかっただけってことだね。

花子：そういえば、量子計算が速いのは確率が複素数になるからだって聞いたことがあるんだけど。

博士：それは正確で無いね。複素数は二つの実数で表せるから、量子状態も、ベクトルの次元を 2 倍すれば、実数ベクトルで表せるよね。複素数を使うのは、他の分野と同様、単に便利だからなだけだよ。

5

花子：じゃあ、最後にもう一つ質問があるんだけど。次は、量子スプレマシーって何か教えて？

博士：教えてあげたいけど、今日はこれから学会にいかないといけないんだ。これらの論文および、そこで引用されている文献を読んでおいてよ。

[Aaronson and Arkhipov, STOC2011; Bremner, Montanaro, and Shepherd, PRL117,080501; Morimae, arXiv:1704.03640]

花子 : わーい。ありがとう。さっとみたところ、L1 ノルムの場合は、worst case vs average case conjecture を仮定しているんだね。たぶんこの仮定は取り除けると思うよ。

次回に続く。（次回、「花子ちゃん Nature に accept の巻」、乞うご期待）