Google 論文について

（２０１９年１１月８日）

ある種の確率分布をサンプルせよ、という問題は量子計算機では高速にできるが、古典計算機では P=NP にならない限り高速にできないことが知られています。P=NP というのは起こらないだろうと信じられていますので、したがって、確率分布のサンプル問題においては量子計算のほうが古典計算より高速である、という帰結が得られます。（実際は P、NP の概念を一般化した多項式階層というものを使いますが、簡単のためより有名な P と NP で説明しました。）このように計算量理論的基盤に基づいて量子優位性を示す理論は量子スプレマシー理論と呼ばれており、２００４年から研究がなされています。（詳細については例えば「量子計算理論、森前」の第１０章を参照。）

今回の Google 論文では、彼らのマシンの「量子優位性」については、この量子スプレマシー理論でサポートされていないことに注意しなければなりません。論文のいくつかの箇所にあたかもそうであるかのように誤解できる箇所があったり、supplementary material には「Complexity-theoretic foundation of the experiment」という章（Sec.XI）があり、そこで量子スプレマシー理論の話がえんえんと書かれていますので、非常に紛らわしく、ミスリードされた方もいると思います。Sec.XI は結局今回の実験の何のサポートにもなっていません。（なのになんで Sec.XI を設けたのか私には分かりません。）

彼らは、彼らのマシンで３分で解けた問題が、スパコンだと１万年かかると主張していますが、それは何か量子スプレマシー理論によるサポートがあるという話ではなく、単に彼らが思いつくベストの古典アルゴリズムだと１万年かかる、ということです。他のもっと高速なアルゴリズムが見つかる可能性は排除できません。実際、別のアルゴリズムだと２．５日でできるという IBM の主張もあるようです。

さて、Sec.XI についてもう少し詳しく見ましょう。まず、今回 Google たちが実現したランダム量子回路（量子ゲートがランダムに作用する）についても、量子スプレマシー理論が昔から研究されています[Bouland et al. Nature Phys. 2019]。しかしながら、Sec.XI で彼らも述べているように、今回の彼らの実験では、その理論が使えるほどの精度はでなかったそうです。

そこで、彼らは今回彼らが作った新しい「量子スプレマシー理論」を Sec.XI で説明しています（Theorem 1）。しかしながら、それは今回のマシンの量子優位性に対し何のサポート

にもなっていません。(なぜなっていないかは最後の付録で説明。) あたかも従来の量子スプレマシー理論の問題点を解決した新しい理論であるかのように書いてありますが、個人的には、これまで研究されてきたスプレマシー理論の問題を何も解決しておらず、しかも単なる劣化版にすぎないという感想です。

以上のように、今回は彼らのマシンが古典より高速であることについては特になにもスプレマシー理論的サポートはないわけです。無いなら無いで別にいいと思います。単に高フィデリティの５３量子ビットものマシンを作ったという事実だけで十分凄いと思います。ただ、あたかも古典に対する優位性についてスプレマシー理論によるサポートがあるかのようにミスリードする記述になっている点はよろしくないと思います。

もし「量子スプレマシーが達成できた」ことの定義として、「量子スプレマシー理論が実験的に実現できた」という（もっとも厳しい）定義を採用するならば、今回の実験は量子スプレマシーが達成できたとは言えません。

（付録）なぜ彼らの理論は量子優位性のサポートになっていないのか
彼らはまず、彼らのマシンの出力確率分布は $p_z'=Fp_z+(1-F)/2^n$ という分布でよく近似できると主張しています。ここで、p_z はノイズの無い理想的なマシンの出力確率分布、F はフィデリティ、n はキュービット数です。そして、彼らは、もし p_z'が古典計算機で多項式時間で厳密にサンプルできたら、p_z の値が $AM[F^{-1}]$で求まる、ということを示しています。ここで、$AM[T]$というのは Arthur の time complexity が T であるような AM です。しかしながら、$F\sim 2^{-m}$であるので、$F^{-1}\sim 2^m$ です。ただし、m は量子ゲートの数。一方で、p_z の値は 2^n 時間で厳密に計算できます。そして普通は $m>>n$ であるので、この結果は自明な包含関係しかいっていないことになります。

さらに、もう一つの問題点として、p_z'の厳密サンプルしか考えていない点です。実際のマシンは p_z'を厳密にサンプルすることはできず、近似的にサンプルすることになります。したがって、古典マシンにだけ厳密サンプルを要求していることになり、アンフェアな勝負になっています。

つまり、彼らが量子スプレマシー理論の意味で量子スプレマシーを達成したと主張できるためには、以下の２点を両方示す必要があります。
（a）p_z'を ϵ 以下の精度で古典的に効率的に近似サンプルできたら計算量理論的に変なことが起きることを理論的に示す。
（b）彼らのマシンは実際に ϵ 以下の精度で p_z'をサンプルできていることを実験的に示す。

ちなみに、[Morimae, Takeuchi and Tani, arXiv:1911.02220]において、（a）についてはεが2^{-m}以上では不可能であるということを証明しました。さらに、εが 2^{-m}以下の場合であっても従来の手法は使えずほぼ無理だろうという議論もしました。また、サンプルの個数が指数個でない限り、実質的には(a)を証明することは不可能であることも示しました。

注（2019/11/11 追記）：紛らわしいのですが、量子スプレマシー理論というのは、実機の振る舞いを古典シミュレートせよ、という問題設定ではありません。それだと、固体をぼんと机の上に出してきて、さあ今からこの固体の振る舞いをスパコンでシミュレートせよ、という話と何も変わらなくなります。それだと、スパコンより固体のほうが「速い」のは自明です。固体は何もしなくてもそこにいるだけで「高速計算」していることになるので、超有利です。また、それだと、サイズをどんどん大きくしていったときに計算複雑さがどう増えるか、というような計算量理論的議論もできません。

そうではなくて、計算量理論的な議論ができるような、スケールする well defined な問題を設定して、それを解くのが量子では速いけど古典では遅い、という話にちゃんとなっています。具体的にはある確率分布 D が与えられたとき、それに L1 ノルムでεより近いような確率分布をサンプルせよ。という問題です。このような「サンプリング問題」は判定問題ではないですが、well defined でちゃんとスケールする問題です。

そして、D として、（ノイズまみれの実機の出す確率分布ではなく）ノイズの無い理想的な量子計算機の出力確率分布をとります。つまり、サンプリング問題の入力はある量子回路の記述です。もしεがそこそこおおきくて、実機のフィデリティが十分大きければ、実機の出す確率分布は D に L1 ノルムでεより近くなるので、実機はサンプリング問題を高速に解けることになります。一方で、量子スプレマシー理論では、多項式時間確率的古典計算機は D に L1 ノルムでεより近い確率分布をサンプルできないことが証明されています。（ただし多項式階層の無限性とある問題の平均的＃P 困難性を仮定。）

ただ今回は実機のフィデリティが十分でなかったので、D を L1 ノルムでε以下でサンプルすることができなかったようなので、スプレマシー理論は使えなかった、ということです。

(2019/12/25)追記
以上で説明したように、いわゆる「多項式階層崩壊しないかぎり量子が古典に勝つ」という量子スプレマシー理論は実験的にはできていないわけです。ではいったい彼らは何をやったのでしょうか？

サンプリングでないにせよ、何かしらの「問題」を定義して、量子と古典でよーいドンしてその問題を解かせて、速さを競うことをしているはずです。ところが、論文では、量子と古典で競争して解かせるべき「問題」が明示的に書いてありませんので、どんな問題で勝負しているかいまいち不明です。頑張って彼らの「お気持ち」をくみ取ると、以下のようなことをしているのでは、と推測できます。

まず、実機を走らせて、測定値 $z_1,\dots,z_k$ を得ます。各 z_i は n-bit 列です。そして、クロスエントロピーという量
$\sum_{i=1}^k P(z_i)$
を計算しています。ここで、$P(z_i)$は、ノイズの無い理想的な量子計算機が z_i を出す確率です。

ここで鋭い方は、クロスエントロピーを求めるためには $P(z_i)$の値を古典計算機で計算しないといけないけど、その計算は指数時間かかるのでは？と気づいたと思います。そのとおりです。（一般には量子回路の出力確率分布の厳密計算は＃P 完全です。）そこで、彼らは、$P(z_i)$が簡単に計算できるような、似た別の量子回路で $P(z_i)$を計算し、そこから真の回路の $P(z_i)$の値を推定しています。その推定値を F としましょう。（実測値でなくて推定値を使っているところは一つの問題点です。）

そして、彼らは、古典計算機で F くらいの値のクロスエントロピーを出すには１万年かかる、と主張しています。

注意しなければいけないのは、この１万年というのをどうやって求めたかです。どうも、その１万年というのは、
（１）$P(z_i)$の値を古典計算機で求めるのに必要な計算時間を見積もる。
（２）それを「フィデリティ補正」する。
ことにより求めたようです。まず、（２）の「フィデリティ補正」のお気持ちはどういうものかというと、実機の量子マシンは $P(z_i)$を完全にサンプルできているわけではなく、ある１以下のフィデリティでしかサンプルできていないので、公平さのために、古典に多少の優遇をあたえるような補正です。（単にフィデリティの逆数をかけているだけに見えますが。）
クロスエントロピーから、フィデリティが推定できるそうですので、そこから実機のフィデ

リティを推定しています。（この微妙な「フィデリティ補正」は、二つ目の問題点です。）

一番みんなが気にしている３番目の問題点は、（１）です。一般には、確率分布をサンプルするには確率分布の値を計算する必要は必ずしもありません。（一般には計算のほうがサンプルよりはるかに難しいです。前者は＃P 完全ですが、後者は BPP に入ります。）したがって、（１）のような方法をとらないでも、F くらいの値のクロスエントロピーを実現するようなもっと高速な古典サンプリングが可能かもしれません。

もともとの量子スプレマシー理論では、そのような懸念を排除するために、「多項式階層が崩壊しないかぎり、ありとあらゆる古典アルゴリズムを考えても量子のほうが勝つ」ということを示したわけです。今回やっているのは単に彼らが思いつく一つの古典アルゴリズムと比較したときに量子が勝つ、としかいっていないわけですから、両者は大きな違いであり、その二つを混同させる書き方はかなりよろしくないと思います。

今回はランダムな回路で構造が無いということもあるので、実際、古典で量子計算の出力をサンプルするには、確率分布を直接計算するしか方法がなさそうには見えます。しかしながら、今後 NISQ アプリケーションとかいって、化学とかもう少し具体的な問題を解くようになってくると、そういう場合は構造があるので、古典で速いアルゴリズムが見つけやすくなる可能性はより高くなります。そのようなときになっても、今回のランダム回路の「量子超越性」を「根拠」にして「だからこの NISQ アプリケーションも古典より速いんだ」とかいうようになってほしくないですね。

ちなみに、最後に、IBM が２．５日でできるといった件について。量子計算を古典計算機でシミュレートする場合、時間とメモリのトレードオフがあります。Google は使えるメモリを少なめに見積もっていたため、メモリが少なくて済むけど計算時間のかかる古典アルゴリズムで（１）を行い、１万年という結果を得ました。ところが実際はメモリがもう少し使えるため、メモリは多くなるけど計算時間が減る古典アルゴリズムを使って IBM が見積もったところ２．５日になったそうです。